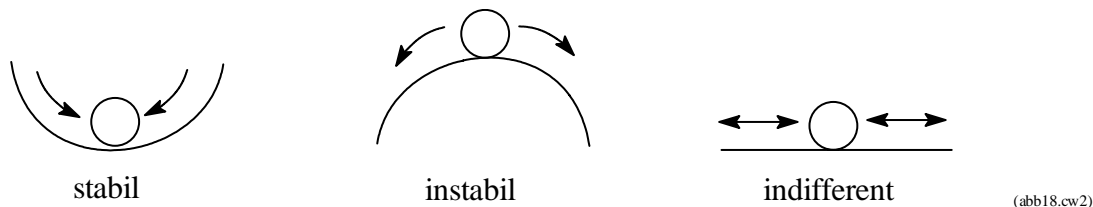


5. Stabile und instabile stationäre Zustände

Man unterscheidet *stabile* und *instabile* stationäre Zustände, je nachdem, ob das System nach Auslenkungen in der Nähe dieser Zustände verbleibt oder nicht. Kehrt das System für $t \rightarrow \infty$ in den ursprünglichen Zustand zurück, ist es asymptotisch stabil.

Einfaches mechanisches Analogon:



Weiterhin unterscheidet man zwischen

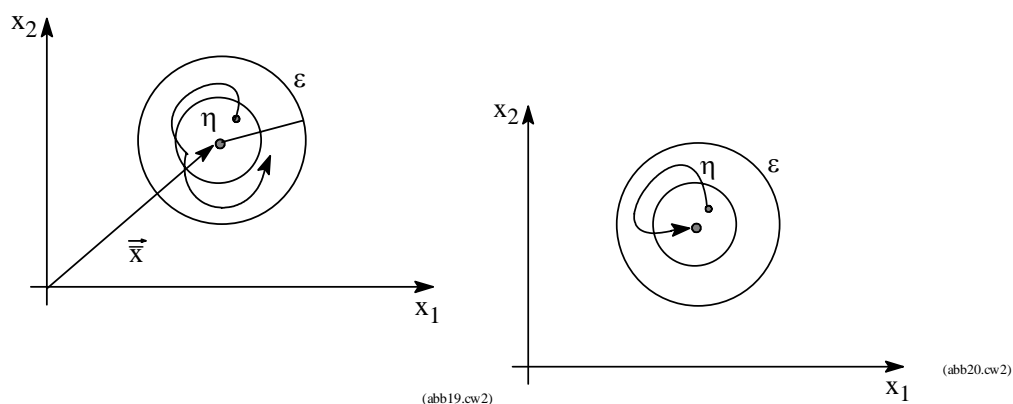
lokaler Stabilität (Verhalten gegenüber kleinen Auslenkungen) und **globaler** Stabilität (auch große Auslenkungen zulässig, Stabilität im Großen).

Allgemeine Stabilitätsdefinition von Lyapunov:

"Eine Lösung $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ des Differentialgleichungssystems $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ist stabil, wenn es für gegebene Werte $\varepsilon > 0$ und t_0 einen Wert $\eta = \eta(\varepsilon, t_0)$ gibt, so daß jede andere Lösung $\bar{x}^*(t)$, für die $\|\bar{x}(t_0) - \bar{x}^*(t_0)\| < \eta$ gilt, für alle $t \geq t_0$ der Beziehung $\|\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)\| < \varepsilon$ genügt. Gilt $\|\bar{x}(t) - \bar{x}^*(t)\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$, ist die Bewegung asymptotisch stabil."

Diese Definition betrifft nicht nur die Stabilität stationärer Zustände, sondern die Stabilität beliebiger Trajektorien.

Sie ist aber bereits sehr fruchtbringend bei ihrer Anwendung auf stationäre Zustände.



Stabilität

asymptotische Stabilität

Offensichtlich ist die Forderung nach asymptotischer Stabilität strenger. Ein stationärer Zustand heißt marginal stabil, wenn er Lyapunov-stabil ist, aber nicht asymptotisch stabil.

Es lässt sich folgender Satz beweisen:

Satz:

Es sei $\frac{d\vec{\xi}}{dt} = A\vec{\xi}$ das linearisierte System der Differentialgleichungen $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ an dem stationären Zustand $\vec{\bar{x}}$ mit $\vec{\xi}(t) = \vec{x}(t) - \vec{\bar{x}}$. Besitzt die Jacobi-Matrix A n verschiedene Eigenwerte, von denen jeder einen streng negativen Realteil hat, ist der stationäre Zustand $\vec{\bar{x}}$ asymptotisch stabil.

Der stationäre Zustand ist instabil, wenn der Realteil wenigstens eines Eigenwertes positiv ist.

Wir betrachten zunächst die Fälle $n=1$ und $n=2$ und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $\bar{x}_i = 0$. ($\xi_i = x_i$)

Fall $n=1$:
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1)$$

Linearisiertes System:
$$\frac{dx_1}{dt} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} x_1$$

Die Systemmatrix ist eindimensional
$$A = \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right\}.$$

und hat nur einen Eigenwert
$$\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

Lösung:
$$x_1(t) = x_1^0 e^{(\partial f_1 / \partial x_1)t} = x_1^0 e^{\lambda_1 t}$$

Für $\lambda_1 < 0$ gilt $x_1(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Für $\lambda_1 > 0$ entfernt sich das System vom stationären Zustand. Für $\lambda = 0$ ist auf der Grundlage des linearisierten Systems keine Aussage möglich.

Besonders aufschlussreich ist der Fall $n=2$:
$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2)$$

Linearisiertes System:
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} x_2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Damit für $t \rightarrow \infty$ gilt $x_1 \rightarrow 0$ und $x_2 \rightarrow 0$, müssen beide Eigenwerte negativ sein.

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - \underbrace{\left(\frac{df_1}{dx_1} + \frac{df_2}{dx_2} \right)}_{Sp} \lambda + \underbrace{\frac{df_1}{dx_1} \frac{df_2}{dx_2} - \frac{df_1}{dx_2} \frac{df_2}{dx_1}}_D = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{Sp}{2} \pm \sqrt{\frac{Sp^2}{4} - D}$$

Eigenwerte können reell oder komplex sein. Reell: $\frac{Sp^2}{4} > D$

Komplex: $\frac{Sp^2}{4} < D$

Falls komplex:

$$\lambda_{1/2} = \frac{Sp}{2} \pm i \sqrt{\underbrace{D - \frac{Sp^2}{4}}_{>0}}$$

$$\lambda_{1/2} = \mu \pm i\omega : \text{konjugiert komplex} \quad e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t + i\omega t} \quad ; \quad e^{\lambda_2 t} = e^{\mu t - i\omega t}$$

mit der Eulerschen Formel: $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad ; \quad e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$

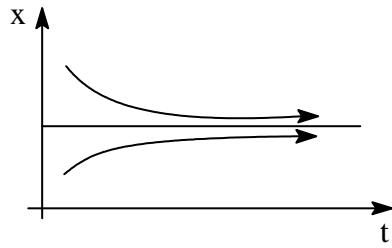
folgt:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\mu t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$
$$e^{\lambda_2 t} = e^{\mu t} (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

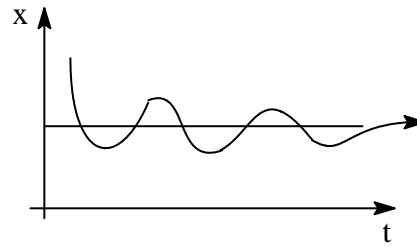
In der Lösung verschwinden die imaginären Anteile, wenn man berücksichtigt, dass auch die Eigenvektoren komplex sind. (Die Gesamtlösung muß reell sein.)

Für die Stabilität ist also erforderlich, dass $\mu < 0$ (im Fall komplexer Eigenwerte).

Für $\frac{Sp^2}{4} < D$ enthalten die Lösungen einen oszillatorischen Anteil.



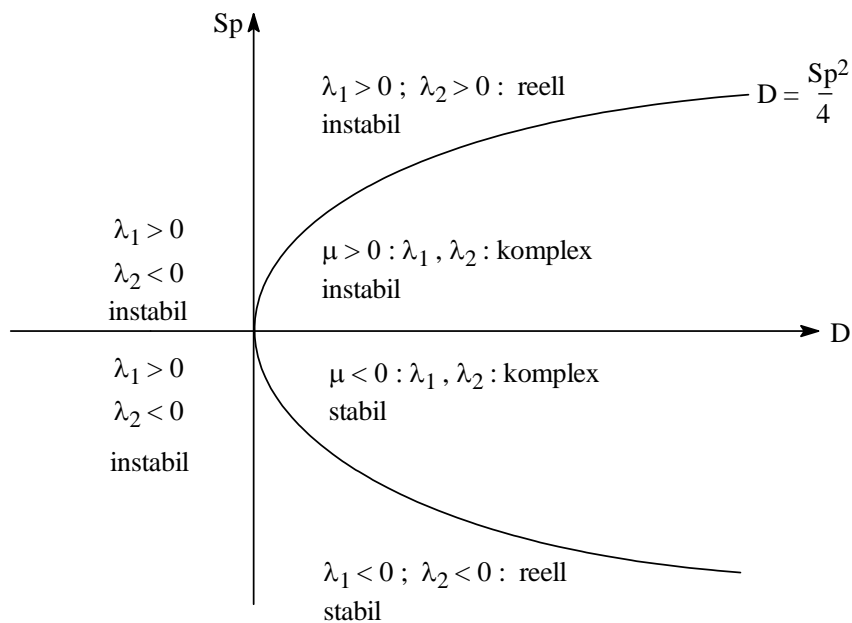
2 reelle negative
Eigenwerte



2 komplex
konjugierte Eigenwerte

(abb21.cw2)

Es ergibt sich in der (D, Sp) -Ebene folgendes Diagramm:



(abb22.cw2)

Erforderlich für Stabilität ist: $Sp < 0$; $D > 0$.

Entsprechend der Art der Lösung, die durch die Eigenwerte festgelegt ist, haben die stationären Zustände einen unterschiedlichen „Charakter“.

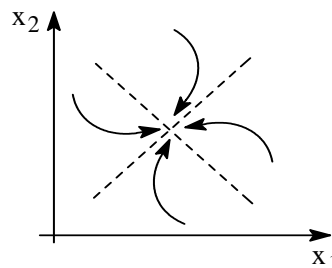
Betrachtung der Bewegung in der Phasenebene:

1a) $\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$

Knoten (stabil)

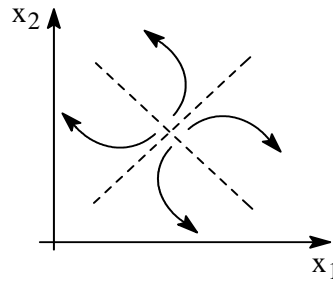
punktierte Linien:

Richtung der Eigenvektoren



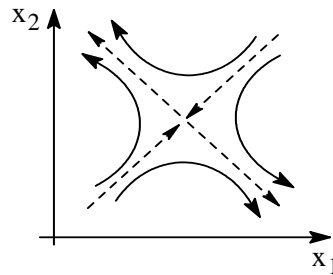
(abb23.cw2)

- 1b)** $\lambda_1 > 0 ; \lambda_2 > 0$
Knoten (instabil)



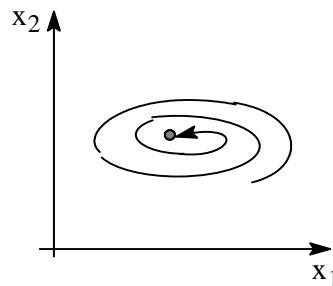
(abb24.cw2)

- 2)** $\lambda_1 > 0 ; \lambda_2 < 0$
Sattelpunkt
(instabil)



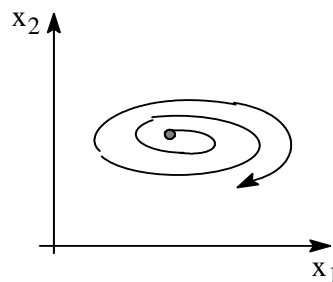
(abb25.cw2)

- 3a)** λ_1, λ_2 komplex
 $\mu < 0$
Fokus (stabil)



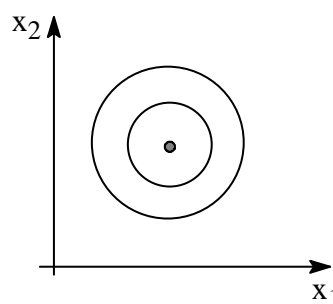
(abb28.cw2)

- 3b)** λ_1, λ_2 komplex
 $\mu > 0$
Fokus (instabil)



(abb27.cw2)

- 4)** λ_1, λ_2 rein imaginär
 $\mu = 0$
Zentrum



(abb26.cw2)

Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung

Frage: Wie verändern die Terme höherer Ordnung, die bei der Formulierung der linearisierten Gleichung vernachlässigt wurden, die Stabilitätseigenschaften des Systems?

Vollständiges System:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + h_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + h_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

mit $\{a_{ij}\}$: Elemente der Jacobi-Matrix.

Die Taylorentwicklungen der Funktionen h_1 und h_2 beginnen mit Termen höherer Ordnung (quadratisch, kubisch, ...) und enthalten keine linearen Terme.

Es lässt sich das folgende **Theorem** beweisen:

- 1.) Ist der stationäre Zustand $x_1 = x_2 = 0$ des linearisierten Systems asymptotisch stabil, dann ist auch die stationäre Lösung des vollständigen Systems asymptotisch stabil.
- 2.) Ist der stationäre Zustand des linearisierten Systems ein Sattel, ein instabiler Knoten oder ein instabiler Fokus (d. h., hat die charakteristische Gleichung mindestens eine Lösung mit positivem Realteil), dann ist auch der stationäre Zustand des vollständigen Systems instabil.

Wichtig: Dieses Theorem liefert nur Aussagen über die *Stabilität*. (Stabilitätsaussagen bleiben erhalten bei Betrachtung des vollständigen Systems.)

Offen: Bleibt beim Übergang zum vollständigen System das **Phasenbild** der Trajektorien erhalten? Es lassen sich Beispiele angeben, wo der stationäre Zustand des linearisierten Systems ein *stabiler Knoten* ist, der des vollständigen Systems aber ein *stabiler Fokus*.

Das Theorem enthält keine Aussagen über Fälle, wo der stationäre Zustand des linearisierten Systems ein Zentrum ist. In solchen Fällen bestimmen *nur* die Funktionen h_1 und h_2 die Stabilität.

Hurwitz-Kriterium

Im n -dimensionalen Fall lautet die charakteristische Gleichung

$$F_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Koeffizienten a_i bestimmen sich aus den Elementen der Jacobimatrix $A = \{a_{ij}\}$.

Polynom n -ten Grades lässt sich für $n > 4$ nicht mehr geschlossen lösen (nur numerisch).

Es gibt aber ein algebraisches und leicht handhabbares Kriterium dafür, ob alle $\text{Re}(\lambda)$ negativ (Hurwitz-Kriterium oder Routh-Hurwitz-Kriterium).

Aus den Koeffizienten des Polynoms $F_n(\lambda)$ wird die sogenannte *Hurwitz-Matrix* H gebildet.

$$\{h_{ij}\} = H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Bildungsgesetz:

$$h_{ij} = \begin{cases} a_{n-(2j-i)} = a_{n+i-2j} & \text{für } 0 \leq 2j-i \leq n \\ 0 & \text{für } 2j-i < 0 \\ 0 & \text{für } 2j-i > n \end{cases}$$

z. B.

$$h_{22} = a_{n+2-4} = a_{n-2}$$

$$h_{13} = a_{n+1-6} = a_{n-5} \quad \text{usw.}$$

Satz: Hinreichend und notwendig dafür, dass die Nullstellen des Polynoms $F_n(\lambda)$ sämtlich einen negativen Realteil haben, ist, dass sowohl alle Koeffizienten a_i des Polynoms als auch alle Hauptminoren H_i von H positive Werte haben.

Hauptminoren

$$H_i = \text{Det} \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & \\ 0 & a_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-i} \end{pmatrix}$$

Wir betrachten $n = 2$ und $n = 3$.

Fall $n = 2$:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$F_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 ;$$

$$a_2 = 1 ; a_1 = -Sp ; a_0 = D$$

1. Forderung:

$$a_0 > 0 \Rightarrow D > 0$$

$$a_1 > 0 \Rightarrow Sp < 0$$

wie bereits aus der expliziten Lösung ersichtlich

2. Forderung:

$$H_1 = a_1 > 0 \quad \text{nichts neues}$$

$$H_2 = a_1 a_0 > 0 \Rightarrow a_0 > 0 \quad \text{nichts neues}$$

Fall $n = 3$:

$$F_3(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_3 = 1.$$

1. Forderung:

$$a_2 > 0 ; a_1 > 0 ; a_0 > 0$$

$$H_1 = a_2 > 0 \quad (\text{nichts neues})$$

$$H_2 = \text{Det} \begin{pmatrix} a_2 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = a_2 a_1 - a_0 > 0$$

$$H_3 = \text{Det} \begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = a_0(a_2 a_1 - a_0) > 0 \quad (\text{nichts neues wegen } a_0 > 0)$$

Wenn alle Koeffizienten positiv sind, ist die kritische Bedingung $a_2 a_1 - a_0 > 0$.

Oben war das charakteristische Polynom für $n = 3$ angegeben:

$$F_3(\lambda) = \lambda^3 - Sp \cdot \lambda^2 - K \cdot \lambda - D = 0$$

damit folgt:

$$\Rightarrow Sp < 0 ; K < 0 ; D < 0 \quad (\text{hier } D < 0 (!))$$

sowie

$$a_2 a_1 - a_0 = Sp \cdot K + D > 0$$

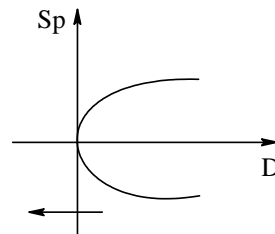
Was passiert bei Verletzung der Stabilitätsbedingungen?

Fall $n = 2$:

1. Möglichkeit

$Sp < 0$; Übergang von $D > 0$ nach $D < 0$

stabiler Knoten \rightarrow Sattel

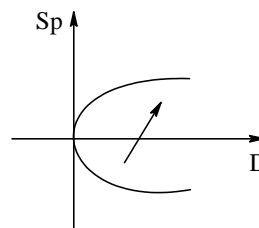


(abb29.cv2)

2. Möglichkeit

$D > 0$; Übergang $Sp < 0$ nach $Sp > 0$

stabiler Fokus \rightarrow instabiler Fokus



(abb30.cv2)

Die 2. Möglichkeit ist typisch für sogenannte Hopf-Bifurkationen (Entstehung von Grenzzyklen).

Fall $n = 3$: Beispiele:

a) drei negative reelle Eigenwerte

$$\begin{aligned} F_3(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \quad ; \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0 \\ &= (\lambda^2 - \lambda\lambda_1 - \lambda\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - \lambda^2\lambda_1 - \lambda^2\lambda_2 + \lambda\lambda_1\lambda_2 - \lambda^2\lambda_3 + \lambda\lambda_1\lambda_3 + \lambda\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= \lambda^3 - \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \\ Sp &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0 \end{aligned}$$

$$K = -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) < 0$$

$$D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$$

stimmt mit den Aussagen überein.

b) zwei konjugiert komplexe,
ein reeller Eigenwert

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu - i\omega)(\lambda - \mu + i\omega)$$

ausmultiplizieren liefert

$$\lambda^3 - \lambda^2(2\mu + \lambda_1) + \lambda(\mu^2 + 2\mu\lambda_1 + \omega^2) - \lambda_1(\mu^2 + \omega^2) = 0$$

$a_2 > 0$; $a_1 > 0$; $a_0 > 0$ sei erfüllt

$$\Rightarrow 2\mu + \lambda_1 < 0 ; \mu^2 + 2\mu\lambda_1 + \omega^2 > 0$$

$$\lambda_1(\mu^2 + \omega^2) < 0$$

$$\text{wegen } \mu^2 + \omega^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0$$

Die Bedingung $a_2a_1 - a_0 > 0$ liefert

$$-2\mu \left(\underbrace{\mu^2 + \omega^2}_{>0} + \underbrace{\lambda_1(2\mu + \lambda_1)}_{>0} \right) > 0$$

$$\Rightarrow a_1a_2 - a_0 > 0 \text{ bedeutet } \mu < 0: \text{ stabil}$$

$$a_1a_2 - a_0 < 0 \text{ bedeutet } \mu > 0: \text{ instabil}$$

Stabilitätswechsel bei $a_1a_2 - a_0 = 0$ bedeutet, dass der Realteil des komplexen Eigenwertes sein Vorzeichen ändert.

Globale Stabilität

Eine andere Methode zur Überprüfung der Stabilität eines stationären Zustandes des Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

die sich **nicht auf Linearisierung** stützt, stammt ebenfalls von Lyapunov.

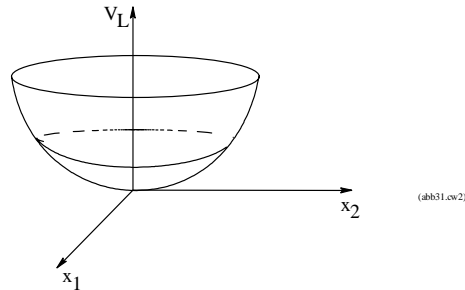
Sogenannte "zweite Methode von Lyapunov".

Dazu wird

- der Koordinatenursprung in den zu betrachtenden Zustand gelegt und
- eine Funktion $V_L(x_1, \dots, x_n)$ definiert (**gesucht!**), die die folgenden Eigenschaften besitzt:

Lyapunov-Funktion

1. $V_L(x_1, \dots, x_n)$: hat stetige erste Ableitungen bezüglich aller Variablen x_i
2. $V_L(x_1, \dots, x_n)$: positiv definit, d. h.
 - $V_L = 0$ für $x_i = 0$ und
 - $V_L > 0$ für $x_i \neq 0$



Ist $x_i(t)$ die Lösung des Differentialgleichungssystems, erhält man

$$\frac{dV_L}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_L}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

Satz:

Ein stationärer Zustand $x_i = 0$ ist stabil, wenn die durch die Gleichung (*) definierte Zeitableitung in einem gewissen Bereich um $x_i = 0$ keine positiven Werte annimmt.

Ist die Zeitableitung in diesem Bereich des Zustandsraumes negativ definit $\left(\frac{dV_L}{dt} = 0 \text{ für } x_i = 0; \frac{dV_L}{dt} < 0 \text{ für } x_i \neq 0 \right)$, dann ist der stationäre Zustand asymptotisch stabil.

Entsprechend gilt für Instabilität:

$V_L(x_1, \dots, x_n)$ positiv definit

$\frac{dV_L}{dt}$: positiv definit in einem Bereich um $x_i = 0$

Vorteil: große Allgemeingültigkeit

Problem: Auffinden einer geeigneten Lyapunov-Funktion oft schwierig oder unmöglich

Einfache Beispiele für Lyapunov-Funktionen

- 1) Differentialgleichungssystem
 - $\frac{dx_1}{dt} = -\lambda_1 x_1$, $\frac{dx_2}{dt} = -\lambda_2 x_2$
 - $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

explizite Lösungen: $x_1 = x_1^0 e^{-\lambda_1 t}$, $x_2 = x_2^0 e^{-\lambda_2 t}$

Zustand $x_1 = x_2 = 0$ ist offenbar global asymptotisch stabil

Wir verwenden die positiv definite Fkt.: $V_L = x_1^2 + x_2^2$

$$\frac{dV_L}{dt} = \sum_i \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V_L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V_L}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

$$\frac{dV_L}{dt} = 2x_1(-\lambda_1 x_1) + 2x_2(-\lambda_2 x_2) = -2\lambda_1 x_1^2 - 2\lambda_2 x_2^2 < 0$$

$\frac{dV_L}{dt}$ ist negativ definit. Das ist eine Bestätigung des Resultats, das sich aus der Betrachtung der expliziten Lösung ergibt.

2) nichtlineares DGL-System

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(\lambda^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + \lambda^2) = f_1(x_1, x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1(\lambda^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(\lambda^2 - x_1^2 - x_2^2) = f_2(x_1, x_2)$$

Auch ohne Kenntnis der expliziten Lösung sind hier Aussagen über Stabilität des stationären Zustands $x_1 = x_2 = 0$ möglich.

Wieder:

$$V_L = x_1^2 + x_2^2$$

$$\frac{dV_L}{dt} = \sum_i \frac{\partial V_L}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V_L}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V_L}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

$$\frac{dV_L}{dt} = 2x_1 f_1 + 2x_2 f_2$$

$$= 2x_1(x_1(\lambda^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + \lambda^2)) + 2x_2(-x_1(\lambda^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(\lambda^2 - x_1^2 - x_2^2))$$

$$\frac{dV_L}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)(\lambda^2 - x_1^2 - x_2^2)$$

für $\lambda = 0$ stets $\frac{dV_L}{dt} < 0$ global stabil

$\lambda \neq 0$ $\frac{dV_L}{dt} > 0$ für $x_1^2 + x_2^2 < \lambda^2$

Gleichgewichtspunkt ist instabil.

