Aufgaben 10.5.2017

Aufgabe 1 *Logistic map*

Sei

$$f(x) = ax(1-x),$$

wobei a ein Parameter im Interval $[0,4]$ ist. Dann definiert f eine Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$.
Wir betrachten einen schrittweisen Prozess mit folgender Regel:

$$x_i \to x_{i+1} = f(x_i) = ax_i(1-x_i).$$

a) Finde (analytisch) die stationären Punkte $\bar{x}$, für die $f(\bar{x}) = \bar{x}$ gilt.

b) Schreibe ein Python-Skript, welches numerisch die Werte $x_1 \ldots x_N$ für ein beliebiges N, einen vorgegebenen Anfangswert x_0 und einen vorgegebenen Parameter a berechnet.

c) Wähle einen Anfangswert x_0 mit $0 < x_0 < 1$ (z.B. $x_0 = 0.25$) und variiere den Parameter a systematisch zwischen 0 and 4. Untersuche das Verhalten des Prozesses für große Zeiten. Plotte hierfür das zeitliche Verhalten der Reihe x_n und entscheide, was die 'Anfangsphase' und was 'große Zeiten' sind. Wiederhole dies für verschiedene Werte von a und beschreibe die Beobachtungen.

Aufgabe 2 *Eimer mit Loch – nicht-exponentielle Annäherung*

Die Füllhöhe H eines auslaufenden Gefäßes gehorcht der Differentialgleichung

$$\dot{H} = -\alpha \frac{H}{A(H)},$$

wobei α ein Parameter ist, der die Lochgröße charakterisiert und $A(H)$ den Gefäßquerschnitt in Höhe H angibt. Untersuche das Auslaufverhalten numerisch für verschiedene Gefäßformen:

a) Zylinder: $A = \text{const.}$

b) Trichter: $A \propto H$

c) Kugel: $A = 4\pi(1-H^2)$ für $-1 \leq H \leq 1$. Beachte, dass hier das Gefäß bei $H = -1$ leer ist!

d) Parabolischer Trichter: $A \propto H^2$